(i) $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$;

(ii) *для любой функции* $y \in Y$ *верна оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y = O\{E_{n-1}(STy)\ln n\} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

*где* $E_l(f)$ *— наилучшее равномерное приближение функции* $f \in C$ *полиномами из* $\Pi_l$.

Отметим, что установленные свойства "полиномиального" оператора $\Gamma_n$ существенно применяются при разработке и обосновании специальных прямых методов решения интегральных уравнений третьего рода с фиксированными особенностями
в ядре.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прессдорф З. *Сингулярные интегральные уравнения с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек* // Матем. исслед. – 1972. – Т. 7. – № 1. – С. 116–132.

2. Габбасов Н. С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 176 с.

**В. К. Захаров, Е. С. Половинкин, Т. В. Родионов**

*Москва, zakharov_valeriy@list.ru,*

*polovinkin@mail.mipt.ru, rodionovtv@mail.ru*

# РАВНОМЕРНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОНКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ БОРЕЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство с ансамблями $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ открытых, замкнутых и борелевских множеств, соответственно.

Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ подмножеств $T$ определим семейство $\mathcal{S}$*-измеримых функций*:

$$M(T, \mathcal{S}) \equiv \left\{ f : T \to \mathbb{R} \mid \forall\, (x, y) \subset \mathbb{R} \ (f^{-1}\left[(x, y)\right] \in \mathcal{S}) \right\}.$$

Положим $M_b(T, \mathcal{S}) \equiv M(T, \mathcal{S}) \cap F_b(T)$, где $F_b(T)$ — семейство всех ограниченных функций на $T$. $\mathcal{B}$-измеримые функции называют *борелевскими*.

Пусть $A(T)$ — некоторое семейство функций на $T$, $\lim A(T)$ — семейство всех функций, являющихся поточечными пределами последовательностей функций из $A(T)$. Рассмотрим бэровский трансфинитный процесс: $\mathrm{Lim}_0\, A(T) \equiv A(T)$, $\mathrm{Lim}_\alpha\, A(T) \equiv \lim \bigcup (\mathrm{Lim}_\beta\, A(T) \mid 0 \leqslant \beta < \alpha)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$.

Возникает естественный вопрос: *каково взаимоотношение между семействами* $B(T, \mathcal{G})$ *борелевских и* $\mathrm{Lim}_{\omega_1} A(T)$ *бэровских функций?*

Наиболее интересный случай равенства $B(T, \mathcal{G}) = \mathrm{Lim}_{\omega_1} A(T)$ получил название *сходимостной классификации борелевских функций с помощью семейства* $A(T)$. В случае метрического пространства $(T, \mathcal{G}_\rho)$ и исходного семейства $C_b(T, \mathcal{G}_\rho)$ ограниченных непрерывных функций Лебег и Хаусдорф доказали, что $B(T, \mathcal{G}_\rho) = \mathrm{Lim}_{\omega_1} C_b(T, \mathcal{G}_\rho)$ [1, 39.IV].

Для произвольных топологических пространств $(T, \mathcal{G})$ в [2] было доказано, что

$$B(T, \mathcal{G}) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{\omega_1} M_b(T, \mathcal{K}_\sigma), \qquad (\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}\}).$$

Исходные семейства $M_b(T, \mathcal{G}) \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ и $M_b(T, \mathcal{K}_\sigma)$ имеют некоторые общие замечательные свойства: они содержат константы и замкнуты относительно равномерной сходимости последовательностей и операций сложения, умножения, супремума, инфимума и *ограниченного деления*

$$\left(\forall\, f \in M_b(T, \cdot)\ \forall\, g \in F_b(T)\ (g = \mathbf{1}/f \Rightarrow g \in M_b(T, \cdot))\right).$$

В [3] нетривиальные семейства $Y(T) \neq \{r\mathbf{1} \mid r \in \mathbb{R}\}$, обладающие всеми этими свойствами, были названы *ограниченно нормальными.* Семейство $C_b(T, \mathcal{G})$ может оказаться тривиальным, и потому не будет порождать сходимостную классификацию. Это приводит к следующему вопросу: *существует ли ограниченно нормальное семейство $Y(T)$, промежуточное между $C_b(T, \mathcal{G})$ и $M_b(T, \mathcal{K}_\sigma)$, порождающее классификацию борелевских функций $B(T, \mathcal{G}) = \mathrm{Lim}_{\omega_1} Y(T)$ ?*

Для любого $S \subset T$ положим

$$\omega(f, S) \equiv \sup(|f(s) - f(t)| \mid s, t \in S).$$

Функция $f$ называется *равномерной относительно семейства $\mathcal{C}$ конечных покрытий $T$*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся покрытие $(C_i \mid i \in I) \in \mathcal{C}$, такое, что $\omega(f, C_i) < \varepsilon$ для всех $i \in I$. В [3] доказано, что семейство $Y(T)$ ограниченно нормально тогда и только тогда, когда $Y(T)$ является семейством функций, равномерных относительно некоторого мультипликативного семейства $\mathcal{C}$ покрытий.

Рассмотрим семейство $\mathcal{C} = \mathrm{Cov}\,\mathcal{K}$ всех конечных покрытий $T$ элементами $\mathcal{K}$ и семейство $U(T, \mathcal{K})$ функций, равномерных относительно $\mathrm{Cov}\,\mathcal{K}$.

**Теорема 1.** *Для любого топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ справедлива сходимостная классификация $B(T, \mathcal{G}) = \mathrm{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{K})$.*

**Теорема 2.** *Существует топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$, такое, что*

$$C_b(T, \mathcal{G}) \equiv M_b(T, \mathcal{G}) \subset U(T, \mathcal{K}) \subsetneqq M_b(T, \mathcal{K}_\sigma).$$

Таким образом, теорема 1 даёт более тонкую классификацию борелевских функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00156 и 08-01-00669).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хаусдорф Ф. *Теория множеств*. – М.: УРСС, 2004.

2. Захаров В. К., Родионов Т. В. *Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве* // Матем. сборник. – 2008. – Т. 199. – Вып. 6. – С. 49–84.

3. Захаров В. К., Родионов Т. В. *Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций* // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84. – Вып. 6. – С. 809–824.

**Н. А. Ибрагимова**

*Казань, ibnailya@yandex.ru*

# ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА РЕШЕНИЙ $B$-ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для $B$-эллиптической системы уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{p-1} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + A_{pp}B_{x_p}u = 0,$$

где $A_{ij}$ — постоянные квадратные матрицы порядка $m$, $B_{x_p}$ — оператор Бесселя по $x_p$, построена фундаментальная матрица решений с особенностью в начале координат.